Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SESIOMADIKA) 2025
Tema: Mendidik dengan matematika, membentuk dunia dengan data: Peran pendidikan matematika, pemodelan dan machine learning dalam era peradaban cerdas

Weight Distribution dari Kode Linier Atas Galois Ring $GR(3^2)$ dengan Menggunakan Lee Distance

Asha Amalia Safitra*
Universitas Sebelas Maret, *Penulis Korespondensi: ashasafitra.07@student.uns.ac.id

Santoso Budiwiyono
Universitas Sebelas Maret

Putranto Hadi Utomo
Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk membentuk dan menganalisis kode linier sebagai kode koreksi kesalahan di atas Galois Ring $GR(3^2)$ dengan menggunakan Lee distance sebagai ukuran jarak. Kode dibangun sebagai submodul dari $GR(3^2)^3$dengan dimensi $k = 2$ dan dua pasangan vektor generator yang berbeda. Perhitungan bobot Lee dilakukan dengan menjumlahkan bobot tiap komponen codeword, sedangkan jarak minimum ditentukan dari distribusi bobot *(weight distribution)*. Implementasi komputasional dilakukan dengan Python untuk menghasilkan seluruh codeword dan menghitung jarak Lee, sedangkan analisis distribusi bobot dilakukan menggunakan Microsoft Excel. Hasil menunjukkan bahwa pasangan generator pertama menghasilkan jarak Lee minimum $d_L = 2$, sehingga kode hanya mampu mendeteksi satu kesalahan namun belum dapat melakukan koreksi kesalahan. Sementara itu, pasangan generator kedua menghasilkan jarak Lee minimum $d_L = 3$, yang memungkinkan kode mendeteksi dua kesalahan dan mengoreksi satu kesalahan. Perbedaan ini menunjukkan bahwa pemilihan generator matrix berpengaruh langsung terhadap parameter performa kode. Penelitian ini menegaskan bahwa konstruksi kode linier di atas Galois ring memberikan fleksibilitas dalam memperoleh kode dengan karakteristik koreksi kesalahan yang lebih baik, serta membuka peluang pengembangan algoritma pencarian generator secara komputasional untuk memperoleh parameter jarak yang lebih optimal.

Kata kunci: Galois ring GR(3^2), kode linier, lee distance, weight distribution, koreksi kesalahan

PENDAHULUAN

Dalam era digital modern, komunikasi data dan penyimpanan informasi telah menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari berbagai aspek kehidupan, mulai dari layanan komunikasi satelit hingga sistem penyimpanan berbasis cloud. Kondisi ideal yang diharapkan dari sistem komunikasi tersebut adalah kemampuan dalam mentransmisikan data secara akurat dan efisien tanpa kesalahan. Namun, pada kenyataannya, proses transmisi data sering dipengaruhi oleh gangguan atau *noise* yang dapat menyebabkan terjadinya kesalahan bit. Untuk mengantisipasi hal tersebut, dikembangkan teori *Error-Correcting Codes* (ECC) yang dirancang untuk mendeteksi sekaligus mengoreksi kesalahan sehingga keaslian data dapat tetap dipertahankan (Kim & Lee, 2017; Choukroun & Wolf, 2024).

Pendekatan pengembangan ECC secara umum banyak dilakukan pada struktur aljabar berbasis *finite field* karena memiliki sifat operasi yang stabil dan telah telah melahirkan berbagai jenis kode seperti Hamming, BCH, dan Reed Solomon (Nurullah, 2014; Atstsauri et al., 2025). Meskipun demikian, struktur field memiliki keterbatasan dalam variasi parameter kode, terutama ketika diperlukan keseimbangan antara laju kode (*code rate*) dan jarak minimum. Untuk memperluas ruang konstruksi kode, beberapa peneliti mulai mengkaji kode linier yang dibangun di atas *finite* ring. Dalam kajian kode atas ring seperti $\mathbb{Z}_4$, ditunjukkan bahwa struktur ring memungkinkan kode direpresentasikan sebagai submodul dengan sifat yang lebih kaya dibandingkan subruang vektor pada field (Bustomi et al., 2011; Chen et al., 2024).

Salah satu struktur yang menarik untuk dikaji lebih lanjut adalah Galois ring, khususnya ring dengan karakteristik p^2. Kim dan Lee (2017) mengkaji secara mendalam bobot Lee pada beberapa kelas kode linier atas Galois ring $GR(p^2, m)$ serta menyusun Lee weight enumerator sebagai alat analisis utama. Galois ring $GR(3^2)$ yang digunakan dalam penelitian ini merupakan kasus khusus dari $GR(p^2, m)$ dengan $p = 3$ dan $m = 1$, sehingga hasil-hasil umum pada kerangka $GR(p^2, m)$ menjadi relevan sebagai landasan teoritis. Di sisi lain, kajian mengenai bobot homogen sebagai generalisasi bobot Lee dan Hamming menunjukkan bahwa metrik non-Hamming memiliki peran penting dalam mengevaluasi performa kode dan karakteristik distribusi bobotnya pada struktur ring (Liu & Liu, 2025). Hal ini menegaskan bahwa penggunaan Lee distance merupakan pendekatan yang relevan dan tepat dalam analisis kode linier atas ring dengan karakteristik lebih tinggi (Çalışkan, 2025; Gao et al., 2023).

Selain metrik bobotnya, analisis terhadap distribusi bobot Lee (*Lee weight distribution*) juga memegang peranan penting karena distribusi bobot menggambarkan penyebaran bobot seluruh *codeword* dalam suatu kode dan berkaitan langsung dengan kemampuan deteksi serta koreksi kesalahan. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa distribusi bobot Lee dapat dihitung secara eksplisit dan lengkap pada berbagai kelas kode linier atas ring, serta memiliki keterkaitan erat dengan hasil pemetaan Gray dan bobot Hamming yang bersesuaian (Chen et al., 2024; Jose et al., 2025; Kewat & Mondal, 2023).

Namun, kajian mengenai penerapan *Lee distance* dan analisis distribusi bobot pada struktur Galois ring dengan orde lebih tinggi seperti $GR(3^2)$ masih relatif terbatas. Sebagian besar penelitian sebelumnya berfokus pada $\mathbb{Z}_4$, ring campuran, atau ring non-*chain*, meskipun telah menghasilkan berbagai kelas kode optimal dengan distribusi bobot Lee yang lengkap (Çalışkan, 2025; Chen et al., 2024; Jose et al., 2025; Gao et al., 2023; Liu & Liu, 2025). Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada konstruksi kode linier sederhana di atas $GR(3^2)$, penghitungan bobot dan *Lee distance* untuk seluruh codeword, serta analisis distribusi bobot sebagai dasar evaluasi kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan. Selain itu, penelitian ini juga mengimplementasikan proses perhitungan ke dalam Microsoft Excel dan Python melalui Google Colab untuk memperoleh prosedur komputasi yang sistematis dan mudah mudah diterapkan kembali.

METODE

Penelitian ini dilakukan melalui pendekatan teoretis dan komputasional. Tahap awal dimulai dengan mempelajari konsep dasar Galois Ring dan menetapkan struktur $GR(3^2)$, yang dalam penelitian ini dipandang sebagai himpunan $\mathbb{Z}_9$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 9. Pendekatan serupa dalam memandang gelanggang kuasi-Galois sebagai dasar konstruksi kode linier telah digunakan dalam beberapa penelitian terdahulu (Kim et al., 2017; Bustomi et al., 2011; Wang & Zhou, 2025; Gao et al., 2021; Holdman, 2016). Struktur ini selanjutnya menjadi dasar dalam membangun kode linier yang dipandang sebagai submodul dari ruang $(GR(3^2))^n$. Pada penelitian ini ditetapkan panjang kode $n = 3$ dan dimensi $k = 2$, sehingga kode linier dibentuk melalui pemilihan dua vektor generator yang saling bebas linier untuk menghasilkan himpunan codeword.

Selanjutnya, digunakan metrik bobot Lee dan *Lee distance* untuk mengevaluasi karakteristik kode. Bobot Lee suatu elemen didefinisikan sebagai $w_L(\alpha) = \min(\alpha, 9 - \alpha)$, yang merupakan definisi standar metrik Lee pada gelanggang dengan karakteristik 9 sebagaimana digunakan dalam kajian kode atas ring (Kim et al., 2017; Çalışkan, 2025; Kewat & Mondal, 2023). Bobot Lee suatu codeword $c = (c_1, c_2, c_3)$ diperoleh melalui penjumlahan bobot setiap komponennya, yaitu $w_L(c) = \sum_{j=1}^{3} w_L(c_j)$. Selanjutnya, *Lee distance* antar dua codeword c_i dan c_j dihitung menggunakan formula $d_L(c_i, c_j) = w_{L(c_i, c_j)}$,

yang merupakan pendekatan umum dalam analisis enumerator bobot Lee pada kode atas ring (Kim et al., 2017; Jose et al., 2025). Nilai jarak minimum yang diperoleh digunakan untuk menentukan kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan dari kode, yaitu mendeteksi hingga $d_L - 1$ kesalahan dan mengoreksi hingga $\left\lfloor \frac{d_L-1}{2} \right\rfloor$ kesalahan. Gray map diperkenalkan sebagai landasan teoretis yang menghubungkan bobot Lee pada kode atas Galois ring dengan bobot Hamming pada struktur lain, sebagaimana ditunjukkan dalam berbagai kajian terdahulu. Namun, pada penelitian ini perhitungan bobot Lee dan penentuan jarak minimum dilakukan secara langsung tanpa melakukan pemetaan Gray secara eksplisit, sehingga Gray map berperan sebagai kerangka konseptual pendukung dalam analisis.

Perhitungan bobot Lee untuk seluruh 81 codeword pada masing-masing pasangan generator dilakukan menggunakan Microsoft Excel, yang sekaligus digunakan untuk menyusun tabel distribusi bobot. Selain itu, implementasi komputasional menggunakan Python pada Google Colab, yang dilakukan mengikuti pendekatan algoritmik yang telah digunakan dalam analisis kode atas ring dan Gray map, digunakan untuk memverifikasi hasil perhitungan secara mandiri, memastikan konsistensi nilai jarak minimum yang diperoleh, serta mendukung analisis performa kode berdasarkan parameter $[n, k, d_L]$ (Jose et al., 2025).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kajian ini bertujuan untuk mengeksplorasi konstruksi kode linier pada Galois Ring $GR(3^2)$ serta menganalisis performanya menggunakan *Lee distance* sebagai ukuran jarak antar codeword Konsep bahwa jarak minimum Lee dapat ditentukan melalui enumerator bobot Lee telah dikaji sebelumnya oleh Kim dalam konteks kode atas Galois ring (Kim et al., 2017; Wang & Zhou, 2025; Matsui & Kaneko, 2025; Gao et al., 2021; Bariffi & Weger, 2023). Pendekatan ini digunakan untuk meninjau bagaimana struktur ring dapat menghasilkan kode dengan karakteristik jarak dan kemampuan koreksi kesalahan yang berbeda dari kode linier yang dibangun di atas *finite field*. Melalui analisis ini, diharapkan dapat diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai sifat dan struktur kode linier pada sistem berbasis ring. Untuk mendukung tujuan tersebut, pada penelitian ini dilakukan konstruksi kode linier sederhana atas $GR(3^2)$dan dilakukan pengujian jarak menggunakan metrik Lee untuk melihat variasi jarak antar codeword serta implikasinya terhadap kemampuan koreksi kesalahan.

Pada penelitian ini dibangun suatu kode linier atas Galois Ring $GR(3^2) \cong \mathbb{Z}_9$yang memiliki sembilan elemen, yaitu

$$GR(3^2) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Dengan memilih panjang kode $n = 3$, maka ruang modul yang dibentuk adalah $(GR(3^2))^3$ yang terdiri atas $9^3 = 729$ elemen. Kode linier didefinisikan sebagai suatu submodul dari $(GR(3^2))^3$. Dalam hal ini dibangun submodul C berdimensi $k = 2$, sehingga kode linier $C \subset (GR(3^2))^3$ dibentuk oleh dua vektor generator yang saling bebas linier. Dipilih dua vektor generator pertama, yaitu

$$g_1 = (1,0,1), \qquad g_2 = (0,1,2),$$

sehingga matriks generator dapat dituliskan sebagai

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Setiap codeword dalam kode Cdapat dinyatakan sebagai kombinasi linier kedua vektor tersebut, yaitu

$$C = ag_1 + bg_2 = (a, b, a + 2b)(\text{mod}9), a, b \in GR(3^2).$$

Karena a dan b masing-masing mengambil 9 kemungkinan nilai, maka diperoleh $9^2 = 81$ codeword.
Selain pasangan generator tersebut, digunakan pula pasangan generator lain sebagai pembanding, yaitu

$$g_1' = (1,1,4), \qquad g_2' = (1,7,5),$$

dengan matriks generator

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Kedua pasangan generator ini menghasilkan dua himpunan kode yang berbeda, yang selanjutnya dianalisis dan dibandingkan berdasarkan distribusi bobot Lee masing-masing.
Bobot Lee suatu elemen $\alpha \in GR(3^2)$ didefinisikan sebagai

$$w_L(\alpha) = \min(\alpha, 9 - \alpha).$$

Sedangkan bobot Lee suatu codeword $c = (c_1, c_2, c_3)$ diberikan oleh:

$$w_L(c) = \sum_{j=1}^{3} w_L(|\, c_j \,|).$$

Selanjutnya, *Lee distance* antar dua codeword c_i dan $c_j$ditentukan oleh:

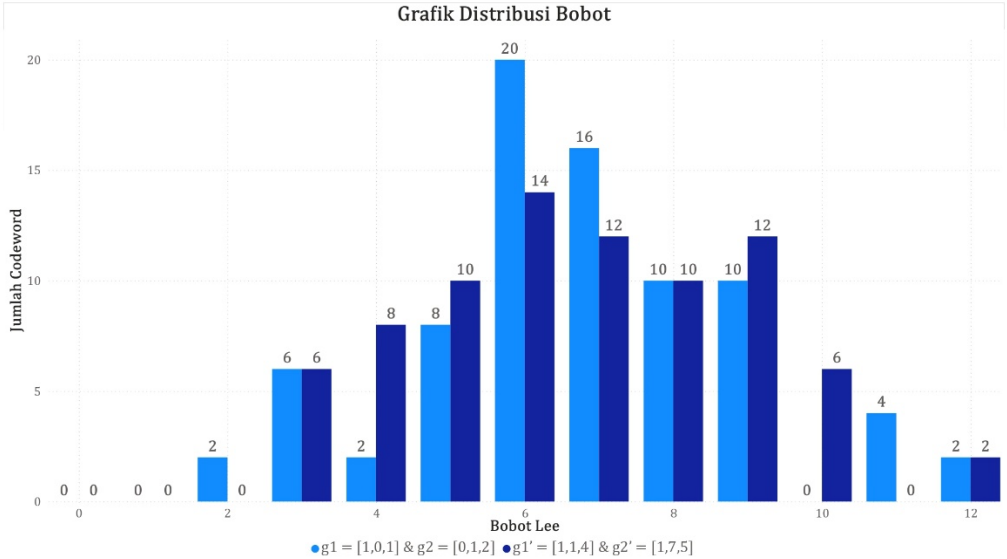
$$d_L(c_i, c_j) = \sum_{j=1}^{3} w_L(c_{ij} - c_{jj}).$$

Seluruh bobot Lee dari 81 codeword pada masing-masing pasangan generator dihitung menggunakan Microsoft Excel. Hasilnya menghasilkan tabel distribusi bobot (weight distribution) berikut.

Table 1. Distribusi Bobot Lee untuk Dua Pasangan Generator

g1 = [1,0,1] & g2 = [0,1,2]		g1' = [1,1,4] & g2' = [1,7,5]	
Bobot $w_L(c)$	Jumlah Codeword	Bobot $w_L(c)$	Jumlah Codeword
0	-	0	-
1	0	1	0
2	2	2	0
3	6	3	6
4	2	4	8
5	8	5	10
6	20	6	14
7	16	7	12
8	10	8	10
9	10	9	12

g1 = [1,0,1] & g2 = [0,1,2]		g1' = [1,1,4] & g2' = [1,7,5]	
Bobot $w_L(c)$	Jumlah Codeword	Bobot $w_L(c)$	Jumlah Codeword
10	0	10	6
11	4	11	0
12	2	12	2



Gambar 1. Grafik Distribusi Bobot

Dari Tabel 1 terlihat bahwa pada kode yang dibangun dengan pasangan generator pertama $g_1 = (1,0,1)$ dan $g_2 = (0,1,2)$, bobot Lee minimum yang bukan nol adalah $w_L = 2$, sehingga *Lee distance* minimumnya adalah $d_L = 2$. Hal ini menunjukkan bahwa kode tersebut mampu mendeteksi hingga satu kesalahan, tetapi belum dapat melakukan koreksi kesalahan karena

$$t = \left\lfloor \frac{d_L - 1}{2} \right\rfloor = 0.$$

Sementara itu, pada kode yang dibangun dengan pasangan generator kedua $g_1' = (1,1,4)$ dan $g_2' = (1,7,5)$, bobot Lee minimum yang bukan nol adalah $w_L = 3$, sehingga diperoleh $d_L = 3$. Dengan jarak minimum ini, kode mampu mendeteksi hingga dua kesalahan dan mengoreksi satu kesalahan, sehingga memiliki kemampuan koreksi yang lebih baik.

Distribusi bobot pada kedua kode juga menunjukkan perbedaan karakteristik. Kode pertama memiliki sebaran bobot yang cenderung terpusat pada bobot menengah (bobot 6 dan 7), sedangkan kode kedua menunjukkan pola penyebaran bobot yang sedikit bergeser ke bobot yang lebih tinggi. Perbedaan distribusi bobot Lee pada kedua kode ini menunjukkan adanya perbedaan karakteristik struktural, di mana kode dengan jarak minimum yang lebih tinggi cenderung memiliki sebaran bobot yang bergeser ke nilai bobot yang lebih besar, sehingga mengindikasikan kemampuan koreksi kesalahan yang lebih baik. Fenomena ini sejalan dengan hasil-hasil penelitian sebelumnya mengenai peran Gray map dan bobot Lee dalam analisis kode linier atas ring (Kim et al., 2017; Bustomi et al., 2011; Çalışkan, 2025; Kewat & Mondal, 2023; Matsui & Kaneko, 2025; Gao et al., 2021; Bariffi & Weger, 2023).

Perbedaan pola ini mengindikasikan bahwa pemilihan generator matrix berpengaruh langsung terhadap jarak minimum dan performa koreksi kesalahan. Dengan demikian, pemilihan pasangan generator yang tepat dapat menghasilkan kode dengan kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan yang lebih optimal. Hasil ini menunjukkan bahwa pemilihan matriks generator berpengaruh langsung terhadap performa kode, terutama dalam meningkatkan kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan, sesuai dengan prinsip umum

bahwa distribusi bobot Lee merupakan alat penting dalam evaluasi karakteristik kode atas ring (Jose et al., 2025; Okombo et al., 2025).

SIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa konstruksi kode linier di atas Galois Ring $GR(3^2)$ dengan menggunakan Lee distance memungkinkan analisis yang lebih mendalam terhadap kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan melalui distribusi bobot (weight distribution). Dua pasangan generator yang digunakan dalam penelitian ini menghasilkan karakteristik kode yang berbeda. Pasangan generator pertama menghasilkan kode dengan *Lee distance* minimum $d_L = 2$, sehingga hanya mampu mendeteksi satu kesalahan dan belum memiliki kemampuan koreksi kesalahan. Sebaliknya, pasangan generator kedua minimum *Lee distance* yang lebih tinggi yaitu $d_L = 3$, sehingga kode mampu mendeteksi hingga dua kesalahan dan mengoreksi satu kesalahan.

Hasil ini menegaskan bahwa pemilihan generator matrix berpengaruh langsung terhadap parameter jarak minimum dan performa koreksi kesalahan. Dengan demikian, konstruksi kode linier atas Galois ring menawarkan fleksibilitas yang lebih besar dalam memperoleh kode dengan karakteristik yang lebih baik dibandingkan pendekatan berbasis *finite* field.

Sebagai langkah lanjutan, diperlukan pengembangan program komputasional yang lebih umum dan sistematis untuk melakukan eksplorasi ruang generator matriks secara lebih luas. Tujuannya adalah untuk menemukan generator yang menghasilkan jarak minimum lebih besar dan distribusi bobot yang lebih menguntungkan, sehingga kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan kode dapat ditingkatkan secara optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Astsauri, M. F., & Utomo, P. H. (2025). Penerapan struktur aljabar *Galois field* pada *error-correcting codes*. In *Proceedings of the Galuh Mathematics National Conference*.

Bariffi, J., & Weger, V. (2023). Better bounds on the minimal Lee distance. *arXiv*. https://arxiv.org/abs/2307.06079

Bustomi, S., Santika, A. P., & Suprijanto, D. (2021). Linear codes over the ring $\mathbb{Z}_4 + u\mathbb{Z}_4 + v\mathbb{Z}_4 + uv\mathbb{Z}_4 + vw\mathbb{Z}_4 + uvw\mathbb{Z}_4$. *IAENG International Journal of Computer Science, 48*(3).

Caliskan, B. (2025). MacWilliams identities of the linear codes over $\mathbb{Z}_4[u, v]/\langle u^2, v^2, uv, vu\rangle$. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 15*(2), 291–297.

Chen, X., Ding, C., & Zhou, Z. (2024). Optimal linear codes with few weights from simplicial complexes. *Finite Fields and Their Applications, 89*, Article 102198.

Choukroun, Y., & Wolf, L. (2024). Learning linear block error correction codes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 42*(1), 98–110.

Gao, J., Meng, X., & Fu, F.-W. (2021). Weight distribution of double cyclic codes over Galois rings. *Designs, Codes and Cryptography, 89*(9), 2171–2191.

Gao, J., Zhang, Y., Meng, X., & Fu, F.-W. (2023). Minimal linear codes from defining sets over $R_p + uR_p$. *Discrete Applied Mathematics, 335*, 113–130.

Holdman, G. R. (2016). *Error-correcting codes over Galois rings*. Whitman College.

Jose, L., Lavanya, G., & Sharma, A. (2025). Linear codes over a mixed-alphabet ring and their Gray images with applications to projective and locally repairable codes. *Manuscript submitted for publication*.

Kewat, P. K., & Mondal, N. K. (2023). Two classes of few-Lee weight $\mathbb{Z}_2[u]$-linear codes using simplicial complexes and minimal codes via Gray map. *Discrete Mathematics, 346*(11), Article 113300.

Kim, B., & Lee, Y. (2017). Lee weights of cyclic self-dual codes over Galois rings of characteristic p². *Finite Fields and Their Applications, 45*, 107–130.

Liu, Y., & Liu, M. (2025). Function-correcting codes with homogeneous distance. *Designs, Codes and Cryptography, 93*(2), 389–414.

Matsui, H., & Kaneko, K. (2025). Entanglement-assisted quantum error-correcting codes via quasi-cyclic codes with complementary duals. *Quantum Information Processing, 24*(5), Article 149.

Mazumdar, A., & Pal, S. (2023). Plotkin-like bound and explicit constructions for function-correcting codes. *IEEE Transactions on Information Theory, 69*(9), 5601–5616.

Nurullah, M. (2014). *Kode linear atas field* F_2 [Undergraduate thesis, Universitas Brawijaya].

Okombo, M. I., Ojiema, M. O., Kivunge, B., & Marani, V. (2025). A characterization of classes of linear ternary codes over the Galois field GF(3). *African Scientific Annual Review, 2*(1), 63–83.

Wang, Y., & Zhou, H. (2025). Counting polynomials with distinct zeros in Galois ring GR(p², r). *Discrete Mathematics, 348*(1), Article 113789.

Wang, Z., Li, N., Zeng, X., & Tang, X. (2025). The Lee weight distributions of several classes of linear codes over $\mathbb{Z}_4$. *Manuscript in preparation*.

Zeng, X., Li, N., & Tang, X. (2024). Generalized toric codes on twisted tori for quantum error correction. *Quantum Information Processing, 23*(6), Article 210.