Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SESIOMADIKA) 2025
Tema: Mendidik dengan matematika, membentuk dunia dengan data: Peran pendidikan matematika, pemodelan dan machine learning dalam era peradaban cerdas

Fungsi Simetri pada Koordinat Kutub dan Karakteristiknya

Firdaus Ubaidillah*
Universitas Jember, *Penulis Korespondensi: *firdaus_u@yahoo.com*

Kosala Dwidja Purnomo
Universitas Jember

Bagus Juliyanto
Universitas Jember

ABSTRAK

Pada sistem koordinat kutub, grafik fungsi ganjil simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$, tetapi tidak berlaku sebaliknya, yakni jika suatu fungsi grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$ tidak perlu merupakan fungsi ganjil. Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu kutub (garis $\theta = 0$), tetapi tidak berlaku sebaliknya, yakni jika suatu fungsi grafiknya simetri terhadap sumbu kutub tidak perlu merupakan fungsi genap. Tujuan penelitian ini adalah mengenalkan fungsi simetri terhadap garis tertentu pada sistem koordinat kutub dengan metode menggeneralisasi fungsi ganjil atau fungsi genap. Selain itu, beberapa karakteristik fungsi simetri pada sistem koordinat kutub akan dibahas dan hasilnya dituangkan dalam teorema-teorema. Hasil yang diperoleh bahwa fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$, namun suatu fungsi yang grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ belum menjamin merupakan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$. Hasil lain yang diperoleh adalah kombinasi linear fungsi-fungsi simetri merupakan fungsi simetri.

Kata kunci: Fungsi ganjil, fungsi genap, fungsi simetri, koordinat kutub

PENDAHULUAN

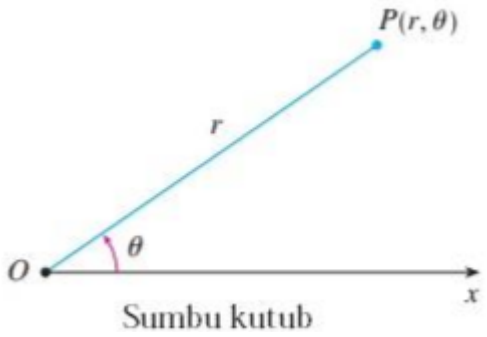
Sistem koordinat biasanya digunakan untuk pendeskripsian, perhitungan, dan analisa, baik yang bersifat geometrik maupun dinamik. Dengan sistem koordinat ini memungkinkan untuk mengidentifikasi suatu titik di bidang atau di ruang dimensi tiga dengan sekumpulan angka. Pada bidang, sistem koordinat persegipanjang (juga disebut Cartesian) adalah sistem koordinat yang paling umum dipakai. Dalam koordinat persegi panjang, posisi koordinat ditafsirkan sebagai panjang dan lebar sisi persegipanjang. Dalam beberapa masalah lain, terkadang lebih mudah menganalisis posisi titik dalam sistem koordinat tertentu sebagai sistem koordinat alternatif. Salah satu sistem koordinat alternatif itu adalah sistem koordinat kutub. Kelebihan koordinat kutub diantaranya menyederhanakan persamaan berbentuk objek simetris melingkar, seperti lingkaran atau spiral, menjadikannya lebih mudah ditulis dan digambar grafiknya dibandingkan dengan koordinat persegipanjang, serta lebih intuitif dalam survei dan navigasi karena lebih mudah mengukur sudut dan jarak secara langsung di lapangan.

Dalam beberapa penelitian terdahulu, banyak peneliti menggunakan koordinat kutub untuk memudahkan investigasi. Shatnawi, dkk (2017) menggunakan sistem koordinat kutub untuk menginvestigasi polar PSO dengan menginisialisasi kembali posisi-posisi partikel berdasarkan teknik inisialisasi. Zhou, dkk (2020) menggunakan koordinat kutub untuk mendeteksi objek untuk penginderaan jauh. Zhu, dkk (2023) dalam eksperimennya menyajikan diferensiasi optik dalam sistem koordinat polar karena lebih intuitif dan informatif dalam penggunaan praktis. Marzuki, dkk (2023) mengenalkan koordinat kutub untuk gerak-gerak melingkar kepada para siswa sekolah. Kemudian, Lee & Kim (2024) tidak menggunakan sistem koordinat persegipanjang dalam memproses citra yang memiliki karakteristik radial secara inheren karena menyebabkan masalah varian arah, sehingga lebih

tepat menggunakan sistem koordinat kutub. Zhang, dkk (2024) mengenalkan dan menyajikan algoritma untuk optimasi Honey Badger Algorithm menggunakan koordinat kutub. Sementara itu para peneliti lain yang membahas dan menggunakan koordinat kutub dalam penelitiannya diantaranya Borji (2016), Nauryzbayeva (2020), Volkova, dkk (2020), Gamero-Castillero (2022), Kumar (2023), Haro & Aguilar (2024), Daniel, dkk (2024), dan masih banyak lagi yang lainnya.

Untuk mengenal sistem koordinat kutub, berikut merupakan pengertian koordinat kutub beserta penjelasannya yang diambil dan dirangkum dari Strang (2016), Lippman & Rasmussen (2018), Hass, dkk (2018), Herman & Strang (2020), Rahmani-Andebili (2021), Simon, dkk (2024), dan Schlicker, dkk (2024)

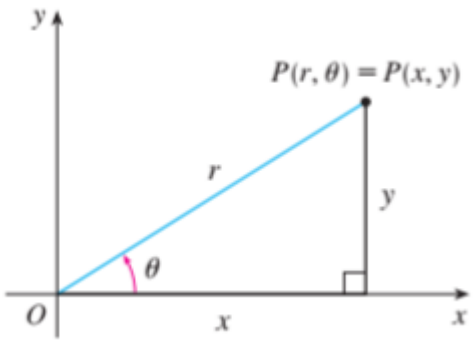
Untuk yang pertama, berkenaan dengan beberapa pengertian dalam sistem koordinat kutub dan penyajian titik. Dengan menggambar sebuah setengah-garis tetap yang berpangkal di titik O arah ke kanan yang selanjutnya dinamakan sumbu kutub. Titik O ini disebut kutub atau titik asal. Sumbu kutub digambar dengan posisi mendatar dan mengarah ke kanan dan oleh sebab itu sumbu ini dapat disamakan dengan sumbu-x positif pada koordinat persegipanjang. Setiap titik $P(r,\theta)$ di koordinat kutub, yang bukan kutub, adalah perpotongan antara sebuah lingkaran berjari-jari r yang berpusat di kutub dan sebuah sinar yang memancar dari kutub dengan besar sudut θ yang dihitung dari sumbu kutub dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam, seperti diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Koordinat kutub

Sebuah sifat pada koordinat kutub yang tidak ada pada sistem koordinat persegi panjang adalah tiap titik memiliki banyak koordinat kutub. Dua titik dalam koordinat kutub dikatakan sama jika masing-masing jaraknya terhadap kutub sama dan selisih kedua sudutnya berkelipatan $2n\pi$ untuk suatu n bilangan bulat. Dengan kata lain, dua titik dalam koordinat kutub (r_1,θ_1) dan (r_2,θ_2) dikatakan sama jika $r_1 = r_2$ dan $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$ atau $r_1 = -r_2$ dan $\theta_1 = \theta_2 + (2n+1)\pi$ untuk suatu n bilangan bulat. Misalnya, titik dengan koordinat kutub (3, π/2) juga memiliki koordinat (3, 5π/2), (3, -3π/2), (-3, 3π/2), dan sebagainya. Untuk titik asal mempunyai koordinat (0, θ), di mana θ sudut sembarang.

Berikutnya, berkenaan dengan hubungan antara koordinat kutub dengan koordinat persegipanjang. Hubungan antara koordinat kutub dengan koordinat persegipanjang dapat dilihat pada Gambar 2. Kutub pada koordinat kutub merupakan titik asal pada koordinat persegipanjang dan sumbu kutub pada koordinat kutub merupakan sumbu-x positif pada koordinat persegipanjang. Garis $\theta = \pi/2$ pada koordinat kutub merupakan sumbu-y positif pada koordinat persegipanjang,



Gambar 2. Hubungan antara koordinat persegipanjang dengan koordinat kutub

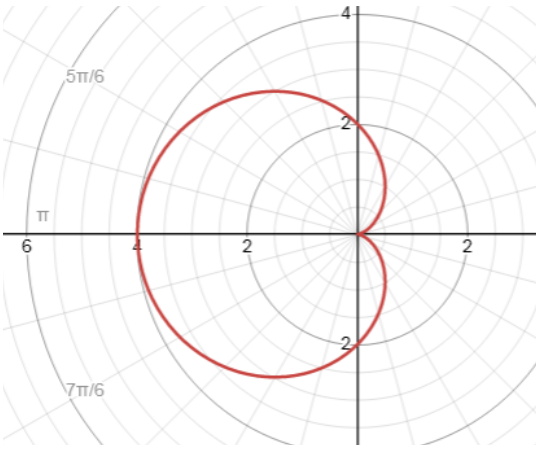
Konversi titik dari koordinat kutub ke koordinat persegipanjang diberikan sebagai berikut

$$x = r\,cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\,sin\theta\,,$$

dan konversi titik dari koordinat persegipanjang ke koordinat kutub diberikan sebagai berikut

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dan} \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Selanjutnya, berkenaan dengan grafik fungsi pada koordinat kutub. Penyajian grafik fungsi dalam koordinat kutub dilakukan dengan cara membuat tabel pasangan terurut (r, θ) dari fungsi $r = f(\theta)$, memplot titik-titik tersebut pada bidang koordinat kutub, kemudian menghubungkan titik-titik untuk membentuk kurva, dan menganalisis pola serta simetri untuk memahami bentuk grafiknya, seperti lingkaran, kardioid, lemniskat, dan lain-lain. Sebagai contoh, grafik fungsi $r = 2 - 2cos\theta$ diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik fungsi $r = 2 - 2cos\theta$

Jika diperhatikan, grafik fungsi r yang diberikan pada Gambar 3 simetri terhadap sumbu kutub (garis $\theta = 0$) dan secara umum berlaku $r(\theta_0 + \theta) = r(\theta_0 - \theta)$ untuk sebarang θ_0. Hal ini menunjukkan bahwa jika fungsi r memenuhi $r(\theta_0 + \theta) = r(\theta_0 - \theta)$ maka grafik fungsinya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$. Jika diperhatikan dengan pengertian fungsi ganjil dan fungsi genap, maka fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ merupakan generalisasi dari fungsi ganjil atau generalisasi dari fungsi genap. Hal ini menjadikan beberapa kemudahan memahami karakteristik fungsi simetri yang diturunkan dari sifat-sifat fungsi ganjil dan fungsi genap yang telah dikenal sebelumnya.

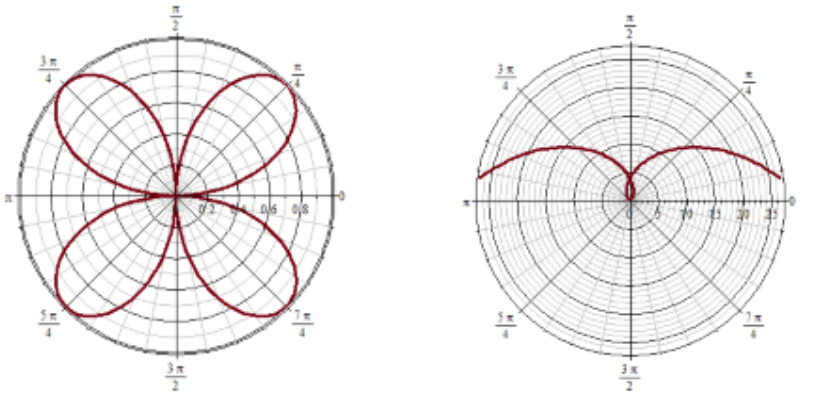
METODE

Fungsi r dalam koordinat kutub dikatakan simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ jika $r(\theta_0 + \theta) = r(\theta_0 - \theta)$ untuk setiap θ. Dalam mengenalkan istilah fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ pada sistem koordinat kutub, diperoleh setelah berhasil menggeneralisasi pengertian fungsi ganjil dan fungsi genap pada sistem koordinat kutub. Grafik fungsi ganjil simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$ dan grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu kutub, yakni garis $\theta = 0$. Fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ ini merupakan hasil generalisasi dari fungsi simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$ pada pengertian fungsi ganjil atau sumbu kutub pada pengertian fungsi genap. Fungsi $r_1(\theta) = r(\theta + \theta_0)$ diartikan sebagai fungsi r_1 yang diperoleh dari fungsi r melalui transformasi sudut (rotasi) terhadap kutub sebesar θ_0 dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam jika $\theta_0 > 0$. Selanjutnya, untuk menggali karakteristik dasar fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ diperoleh dengan menurunkan sifat-sifat dasar fungsi ganjil dan fungsi genap pada sistem koordinat kutub. Untuk karakteristik lebih jauh berkenaan dengan kombinasi linier dan integral fungsi simetri mengikuti sifat-sifat ruang vektor dan integral.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengawali hasil dan pembahasan ini, terlebih dahulu dikenalkan pengertian fungsi ganjil dan fungsi genap pada koordinat kutub. Definisi fungsi ganjil dan fungsi genap sistem koordinat kutub analog dengan definisi fungsi ganjil dan fungsi genap pada koordinat persegipanjang.

Definisi 1. Fungsi $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada sistem koordinat kutub dikatakan **fungsi ganjil** jika $r(-\theta) = -r(\theta)$, untuk setiap θ di $\mathbb{R}$.
Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan $r_1(\theta) = \sin 2\theta$ dan $r_2(\theta) = \theta^3$, keduanya merupakan fungsi ganjil karena berlaku $r_1(-\theta) = \sin(2(-\theta)) = \sin(-2\theta) = -\sin(2\theta) = -r_1(\theta)$ dan juga berlaku $r_2(-\theta) = (-\theta)^3 = -\theta^3 = -r_2(\theta)$. Sedangkan fungsi $r_3(\theta) = \cos\theta$ bukan merupakan fungsi ganjil. Grafik fungsi ganjil pada koordinat kutub simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$. Fungsi ganjil r_1 dan r_2 yang diberikan pada contoh di atas, grafiknya dapat dilihat pada Gambar 4.

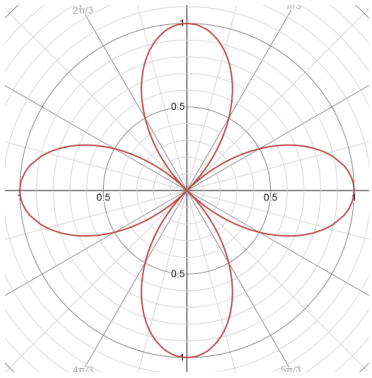


(a). Grafik fungsi $r_1(\theta) = \sin 2\theta$ (b). Grafik fungsi $r_2(\theta) = \theta^3$

Gambar 4. Grafik fungsi ganjil pada sistem koordinat kutub

Pada sistem koordinat persegipanjang, grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik asal dan setiap fungsi yang grafiknya simetri terhadap titik asal adalah fungsi ganjil. Pada sistem koordinat kutub, grafik fungsi ganjil simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$, namun tidak setiap fungsi yang grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$ merupakan fungsi ganjil. Sebagai

contoh, fungsi $r = cos2\theta$ yang grafiknya diberikan pada Gambar 5 simetri terhadap garis $\theta = \pi/2$, tetapi $r = cos2\theta$ bukanlah fungsi ganjil.



Gambar 5. Grafik fungsi $r = cos2\theta$

Selanjutnya dibahas beberapa karakteristik fungsi ganjil yang disajikan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 2. Jika r fungsi ganjil, maka $r(0) = 0$.

Bukti: Misal berlaku $r(-\theta) = -r(\theta)$, untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu,

$$r(0) = r(-0) = -r(0),$$

sehingga diperoleh $2r(0) = 0$, yang berakibat $r(0) = 0$. ■

Dari Teorema 2 ini diperoleh informasi bahwa grafik fungsi ganjil setidaknya minimal satu kali melewati kutub, karena $r = 0$ adalah kutub.

Teorema 3. Jika r_1 dan r_2 keduanya fungsi ganjil, maka kr_1 dengan $k \in \mathbb{R}$ dan $r_1 + r_2$ merupakan fungsi-fungsi ganjil.

Bukti: Misal berlaku $r_1(-\theta) = -r_1(\theta)$ dan $r_2(-\theta) = -r_2(\theta)$, untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu, untuk setiap $k \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$kr_1(-\theta) = k\big(-r_1(\theta)\big) = -kr_1(\theta),$$

dan

$$(r_1 + r_2)(-\theta) = r_1(-\theta) + r_2(-\theta) = -r_1(\theta) - r_2(\theta) = -(r_1 + r_2)(\theta)\,.$$

Jadi kr_1 dengan $k \in \mathbb{R}$ dan $r_1 + r_2$ merupakan fungsi-fungsi ganjil. ■

Dari Teorema 3, diperoleh akibat berikut.

Akibat 4. Kombinasi linear dari fungsi-fungsi ganjil adalah fungsi ganjil.

Teorema 5. Jika r fungsi ganjil yang terintegral pada selang $[-\theta_0, \theta_0]$, maka

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = 0.$$

Bukti: Misalkan $\theta = -\alpha$, maka $d\theta = -d\alpha$. Karena r fungsi ganjil, dengan sifat integral dan menggunakan variabel dummy, diperoleh

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = -\int_{\theta_0}^{-\theta_0} r(-\alpha)\, d\alpha = \int_{\theta_0}^{-\theta_0} r(\alpha)\, d\alpha = -\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta,$$

sehingga $2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = 0$ yang berakibat $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = 0$. ■

Berikutnya diberikan pengertian fungsi genap pada sistem koordinat kutub dan dibahas beberapa karakteristik fungsi genap yang disajikan dalam teorema-teorema.

Definisi 6. Fungsi $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada sistem koordinat kutub dikatakan **fungsi genap** jika $r(-\theta) = r(\theta)$, untuk setiap θ di $\mathbb{R}$.
Sebagai contoh, fungsi-fungsi yang didefinisikan $r_1(\theta) = \cos\theta$ dan $r_2(\theta) = \theta^2 + 1$, keduanya merupakan fungsi genap. Sedangkan fungsi $r_3(\theta) = 1 + \sin\theta$ bukan merupakan fungsi genap. Grafik fungsi genap pada koordinat kutub simetri terhadap sumbu kutub, yakni garis $\theta = 0$.

Teorema 7. Jika r_1 dan r_2 keduanya fungsi genap, maka kr_1 dengan k $\in \mathbb{R}$, $r_1 + r_2$ dan $r_1 \cdot r_2$ merupakan fungsi-fungsi genap.
Bukti: Misal berlaku $r_1(-\theta) = r_1(\theta)$ dan $r_2(-\theta) = r_2(\theta)$, untuk setiap θ $\in \mathbb{R}$. Oleh karena itu, untuk setiap k $\in \mathbb{R}$ diperoleh

$$kr_1(-\theta) = k\big(r_1(\theta)\big) = kr_1(\theta),$$
$$(r_1 + r_2)(-\theta) = r_1(-\theta) + r_2(-\theta) = r_1(\theta) + r_2(\theta) = (r_1 + r_2)(\theta),$$

dan

$$(r_1 \cdot r_2)(-\theta) = r_1(-\theta) \cdot r_2(-\theta) = r_1(\theta) \cdot r_2(\theta) = (r_1 \cdot r_2)(\theta).$$

Jadi kr_1 dengan k $\in \mathbb{R}$, $r_1 + r_2$ dan $r_1 \cdot r_2$ merupakan fungsi-fungsi genap. ■
Dari Teorema 7, diperoleh akibat berikut.

Akibat 8. Kombinasi linear dan perkalian dari fungsi-fungsi genap adalah fungsi genap.
Bukti: Dapat menggunakan induksi matematika.
Teorema 9. Jika r fungsi genap yang terintegral pada selang $[-\theta_0, \theta_0]$, maka

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = 2\int_{0}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta.$$

Selanjutnya diberikan pengertian fungsi simetri yang dapat dipandang sebagai generalisasi fungsi ganjil atau fungsi genap.

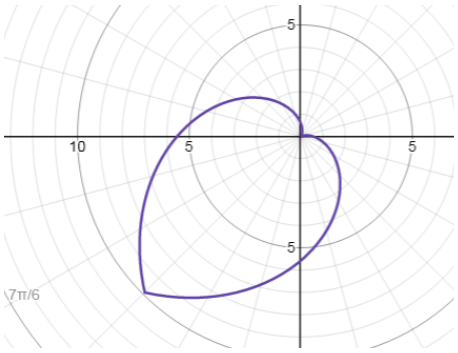
Definisi 10. Fungsi $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pada sistem koordinat kutub dikatakan **simetri** terhadap garis $\theta = \theta_0$ jika $r(\theta_0 - \theta) = r(\theta_0 + \theta)$, untuk setiap θ di $\mathbb{R}$.
Dari Definisi 10 ini, jika diambil $\theta_0 = 0$ maka berakibat bahwa fungsi simetri terhadap sumbu kutub merupakan fungsi genap. Fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$. Sebagai contoh, grafik fungsi $r(\theta) = \theta^2 - \frac{\pi\theta}{2} - \frac{\pi^2}{16}$ merupakan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \frac{\pi}{4}$, sebab

$$r\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)^2 - \frac{\pi\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \theta^2,$$

dan

$$r\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)^2 - \frac{\pi\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \theta^2.$$

Grafik fungsi $r(\theta) = \theta^2 - \frac{\pi\theta}{2} - \frac{\pi^2}{16}$ disajikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Grafik fungsi $r(\theta) = \theta^2 - \frac{\pi\theta}{2} - \frac{\pi^2}{16}$

Namun, suatu fungsi yang grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ belum menjamin merupakan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$. Sebagai contoh, fungsi $r(\theta) = \cos 2\theta$ yang grafiknya diberikan pada Gambar 5, grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \pi/4$ tetapi $r(\theta) = \cos 2\theta$ bukan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \pi/4$ sebab $r\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin 2\theta \neq -\sin 2\theta = r\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$.

Teorema 11. Jika r_1 dan r_2 keduanya fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$, maka kr_1 dengan k $\in \mathbb{R}$, $r_1 + r_2$ dan $r_1 \cdot r_2$ merupakan fungsi-fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$.
Bukti: Misal berlaku $r_1(\theta_0 - \theta) = r_1(\theta_0 + \theta)$ dan $r_2(\theta_0 - \theta) = r_2(\theta_0 + \theta)$, untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu, untuk setiap k $\in \mathbb{R}$ diperoleh

$$kr_1(\theta_0 - \theta) = k\big(r_1(\theta_0 - \theta)\big) = kr_1(\theta_0 + \theta),$$
$$(r_1 + r_2)(\theta_0 - \theta) = r_1(\theta_0 - \theta) + r_2(\theta_0 - \theta) = r_1(\theta_0 + \theta) + r_2(\theta_0 + \theta)$$
$$= (r_1 + r_2)(\theta_0 + \theta),$$

dan

$$(r_1 \cdot r_2)(\theta_0 - \theta) = r_1(\theta_0 - \theta) \cdot r_2(\theta_0 - \theta) = r_1(\theta_0 + \theta) \cdot r_2(\theta_0 + \theta) = (r_1 \cdot r_2)(\theta_0 + \theta)$$

Jadi kr_1 dengan $k \in \mathbb{R}$, $r_1 + r_2$, dan $r_1 \cdot r_2$ merupakan fungsi-fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$. ■

Akibat 12. Kombinasi linear dan perkalian dari sejumlah berhingga fungsi-fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ adalah fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$.
Bukti: Dapat menggunakan induksi matematika. ■
Teorema 13. Jika r fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ yang terintegral pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0 + \theta_1]$, maka

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\, d\theta = 2\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\, d\theta.$$

Bukti: Dengan sifat integral tentu, diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\, d\theta = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\, d\theta \qquad (1)$$

Selanjutnya, pandang integral pertama pada ruas kanan persamaan (1).
Dengan menggunakan sifat integral tentu dan Definisi 10, diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = -\int_{\theta_1}^{0} r(\theta_0 - \theta)\, d\theta = \int_{0}^{\theta_1} r(\theta_0 + \theta)\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\, d\theta \qquad (2)$$

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1), diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta = 2\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta. \quad \blacksquare$$

SIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh beberapa simpulan berkaitan dengan pengertian dan karakteristik fungsi simetri pada koordinat kutub:

1. Fungsi r pada sistem koordinat kutub disebut fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ jika berlaku $r(\theta_0 - \theta) = r(\theta_0 + \theta)$, untuk setiap $\theta \in R$.
2. Fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ merupakan generalisasi dari fungsi ganjil atau fungsi genap pada koordinat kutub.
3. Fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$, namun suatu fungsi yang grafiknya simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ belum menjamin merupakan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$.
4. Kombinasi linier dan perkalian sejumlah hingga fungsi-fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ juga merupakan fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$.
5. Jika r fungsi simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$ yang terintegral pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0 + \theta_1]$, maka

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta = 2\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta)\,d\theta.$$

Penelitian lanjutan yang bisa dikembangkan setelah dikenalkan pengertian fungsi simetri dan karakteristiknya antara lain pengenalan dan karakteristik fungsi simetri pada sistem dimensi tiga, misal koordinat bola.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Keris-Dimas GFracMA (Kelompok Riset dan Pengabdian kepada Masyarakat: Geometry, Fractal, and Math Analysis) Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember atas bantuan pendanaan.

DAFTAR PUSTAKA

Borji, V., & Voskoglou, M. (2016). Applying the APOS theory to study the student understanding of polar coordinates. *American Journal of Educational Research, 4*(16), 1149–1156. https://doi.org/10.12691/education-4-16-5

Daniel, J., Ayinde, K., Dudu, E. E., & Eberechukwu, O. I. (2024). Application of polar coordinates in the summation of the Gaussian distribution. *RT&A, 19*(2), 408–424.

Gamero-Castillero, J. A., Quiñones-Rodríguez, Y., Apollaro, G., Hernández-Mendo, A., Morales-Sánchez, V., & Falcó, C. (2022). Application of the polar coordinate technique in the study of technical-tactical scoring actions in taekwondo. *Frontiers in Sports and Active Living, 4*, Article 877502. https://doi.org/10.3389/fspor.2022.877502

Haro, A., & Aguilar, M. S. (2024). Learning obstacles and teaching proposals associated with the polar coordinate system: A literature review. *International Journal of Experimental Mathematics and Science Technology, 56*(5), 828–850. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2295903

Hass, J., Heil, C., & Weir, M. (2018). *Thomas' calculus* (14th ed.). Pearson.

Herman, E., & Strang, G. (2020). *Calculus, volume I*. OpenStax, Rice University.

Kumar. (2023). An overview on polar plots r = 1 + 2m cos(θ). *IOSR Journal of Mathematics, 19*(5), 59–69. https://doi.org/10.9790/5728-1905025969

Lee, G., & Kim, W. (2024). Image processing in L1-norm-based discrete Cartesian and polar coordinates. *Electronics, 13*(6), 1–12.

Lippman, D., & Rasmussen, M. (2018). *Precalculus: An investigation of functions* (Version 2.1). Creative Commons.

Marzuki, M., Sudiarta, I. W., Ardianto, T., Illahi, R. R., Wijaya, N. I., & Ariani, T. O. (2023). Pengenalan sistem koordinat polar dalam pembahasan materi gerak melingkar bagi siswa MAN 1 Lombok Timur. *Jurnal Pepadu, 4*(3), 435–440. https://doi.org/10.29303/pepadu.v4i3.3605

Nauryzbayeva, R. M. (2020). An oblique asymptote of functions in polar coordinate system. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 4*(1), 1–4. https://doi.org/10.26855/jamc.2020.03.001

Rahmani-Andebili, M. (2021). *Calculus: Practice problems, methods, and solutions*. Springer Nature.

Schlicker, S., Keller, M. T., & Long, N. (2024). *Active calculus: Multivariable*. Creative Commons.

Shatnawi, M., Nasrudin, M. F., & Sahran, S. (2017). A new initialization technique in polar coordinates for particle swarm optimization and polar PSO. *International Journal of Applied Engineering Science and Information Technology, 7*(1), 242–249.

Simón, P. D., D'Ascoli, S., Chemla, E., Lakretz, Y., & King, J. R. (2024). A polar coordinate system represents syntax in large language models. In *Proceedings of the 38th Conference on Neural Information Processing Systems*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.05571

Strang, G. (2016). *Calculus, volume II*. OpenStax.

Volkova, S. N., Shleenko, A. V., & Sivak, E. E. (2020). Algorithm for designing building constructions expressed by nonlinear functions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 911*, Article 012011. https://doi.org/10.1088/1757-899X/911/1/012011

Zhang, S. W., Wang, J. S., Li, Y. X., Zhang, S. H., Wang, Y. C., & Wang, X. T. (2024). Improved honey badger algorithm based on elementary function density factors and mathematical spirals in polar coordinate systems. *Artificial Intelligence Review, 57*, Article 55. https://doi.org/10.1007/s10462-023-10658-2

Zhou, L., Wei, H., Li, H., Zhao, W., Zhang, Y., & Zhang, Y. (2020). Object detection for remote sensing images based on polar coordinates. *IEEE Access, 8*, 223373–223384.

Zhu, J., Wang, Y., Gao, F., & Zhang, Z. (2023). Optical differentiation in a polar coordinate system. *Applied Physics Letters, 122*(9). https://doi.org/10.1063/5.0140272