



Relasi Antara Grup *Action* dan Grup *Action* pada Himpunan *Coset* *Coset* dari Subgrup Isotropi

Santoso Budiwiyo*

Universitas Sebelas Maret, *Penulis Korespondensi: santosobudi@staff.uns.ac.id

Vika Yogi Kurniawan

Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK

Suatu Morfisma dari G -set X ke G -set Y didefinisikan sebagai pemetaan $f: X \rightarrow Y$ sedemikian sehingga $f(g.x) = g.f(x)$ untuk setiap g di G dan setiap x di X . Jika morfisma f bijektif maka inversnya juga morfisma G -sets, sehingga f dinamakan isomorfisma G -set dan G -set X isomorfis dengan Y . Tujuan dari makalah ini adalah untuk menjelaskan sifat isomorfisma antara G -set grup *action* reguler dengan G -set grup *action* dari G pada G dengan perkalian kiri dan G -sets grup *action* bebas dengan G -set Grup *action* dari G pada $G \times X$ untuk suatu himpunan X dengan perkalian kiri pada koordinat pertama.

Kata kunci: *Group Actions*, *Isomorfis*, *Morphism*

PENDAHULUAN (times new roman, 12pt)

Grup di dalam matematika sering digunakan untuk menyatakan sifat simetri dari objek-objek. Ide awal dari grup *action* adalah setiap elemen dari grup G bekerja sebagai pemetaan bijektif pada suatu himpunan. Dalam hal ini grupnya dinamakan grup transformasi pada himpunan. Seperti misalnya pada grup simetri S_n dan sugrup-subgrupnya bekerja pada himpunan $\{1, \dots, n\}$ atau pada segi- n beraturan, dalam aljabar linear automorfisma dari ruang vektor bekerja pada ruang vektor, matriks berukuran $n \times n$ bekerja pada ruang vektor R^n , khususnya suatu grup dapat memberi *action* pada grup yang lain atau juga pada dirinya sendiri.

Grup *action* G pada X adalah homomorfisma grup $G \rightarrow \text{Sym}(X)$, dengan $\text{Sym}(X)$ grup dari semua pemetaan bijektif dari X ke dirinya sendiri (Lang Serge, 2002). Jika G grup dan X adalah suatu himpunan yang tidak kosong maka dikatakan G bekerja pada (*action*) X jika ada suatu pemetaan atau fungsi f dari $G \times X$ ke X .

Grup *action* dinotasikan dengan G -set dan didefinisikan sebagai pemetaan f dari $G \times X$ ke X sedemikian sehingga $(g, x) \mapsto g.x$ dan untuk setiap x di X dan untuk setiap g, h di G berlaku $e.x = x$ dengan e elemen identitas dari G dan $g.(h.x) = (gh).x$. Ide G -set dapat diperumum sebagai G -set pada Γ -semitransitive groups (Rakhsh and Ostadhadi, 2018). Dalam penelitian ini akan di bahas beberapa bukti adanya isomorfisma pada dua G -set dari suatu Grup *action* diantaranya setiap G -set grup *action* reguler isomorfis dengan G -set Grup *action* pada G dengan perkalian kiri dan Grup *action* dari G pada himpunan koset-koset relatif terhadap subgrup isotropi isomorfis dengan grup *action* yang transitif.

Dalam artikel ini akan di bahas isomorfisma dari Grup *action* dengan grup *action* tertentu, Sebagai contoh Grup *action* dari G pada himpunan koset-koset relatif terhadap subgrup isotropi adalah salah satu contoh dari grup *action* yang isomorfis dengan grup *action* yang transitif.

Jika G adalah grup dan X adalah himpunan, maka grup *action* dapat dianggap sebagai homomorfisma grup dari G ke grup simetri dari himpunan X . Dalam hal ini, permutasi pada X adalah aksi yang dilakukan pada setiap elemen dalam himpunan X dengan cara berikut; 1) Permutasi pada X dengan elemen identitas G adalah transformasi identitas pada X , 2) Perkalian gh di X adalah komposisi dua permutasi yang ditentukan oleh elemen g dan h di

G. Karena setiap elemen *G* mewakili sebuah permutasi, maka grup action ini juga disebut sebagai representasi permutasi (Lang Serge, 2002).

Definisi 1:

Jika grup *G* dan *X* adalah himpunan yang tidak kosong, maka dikatakan bahwa *G* bekerja pada *X* dari kiri jika terdapat pemetaan dari $G \times X$ ke *X* yang ditulis dengan notasi $(g, x) \rightarrow g.x$ sedemikian hingga $e.x = x$ untuk setiap elemen *x* di *X* dengan *e* adalah elemen identitas *G*, dan $g.(h.x) = (gh).x$ untuk setiap elemen *g*, *h* di *G* dan elemen *x* di *X*.

Dari definisi di atas, diperoleh bahwa untuk setiap *g* di *G*, pemetaan atau fungsi yang memetakan elemen *x* di *X* ke *g.x* adalah pemetaan bijektif dari *X* ke *X*. Oleh karena itu, definisi grup action *G* pada *X* adalah homomorfisme grup $G \rightarrow \text{Sym}(X)$, dengan $\text{Sym}(X)$ adalah grup dari semua pemetaan bijektif dari *X* ke *X* (Lang Serge, 2002).

Jika suatu grup memberikan aksi pada himpunan *X*, pemetaan $G \times X \rightarrow X$, maka dikatakan *G* bekerja atau bertindak pada (bekerja pada) *X* atau *X* adalah *G*-set. Grup action kanan *G* pada *X* dapat didefinisikan sebagai pemetaan $X \times G \rightarrow X$ dengan dua aksioma $(x.g).h = x.(gh)$ dan $xe = x$. Dalam artikel ini, hanya action kiri yang akan digunakan.

Contoh:

1. Setiap grup *G* bekerja pada *G* dengan dua cara: $g.x = (g, x)$ atau $g.x = (gxg^{-1})$ untuk semua elemen *x* di *G*.
2. Grup simetri *S_n* dan subgrupnya bertindak pada himpunan $\{1, \dots, n\}$ dengan permutasi elemen-elemennya.
3. Grup simetri polihedron bertindak pada himpunan titik-titiknya.
4. Grup simetri setiap objek geometri bertindak pada himpunan titik-titik pada objek tersebut.

Berdasarkan sifat-sifat elemen dalam himpunan *X* dan dalam grup *G*, jenis-jenis grup action didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2: Grup action *G* pada *X* disebut:

1. Transitif jika untuk dua elemen *x*, *y* di *X* terdapat *g* di *G* sedemikian sehingga $g.x = y$
2. Setia jika untuk setiap *g*, *h* yang berbeda di *G* terdapat *x* di *X* sedemikian sehingga $g.x \neq h.x$
3. Bebas jika untuk setiap *g*, *h* yang berbeda di *G* dan semua *x* di *X*, maka $g.x \neq h.x$
4. Reguler jika transitif dan bebas, yang setara dengan untuk setiap dua *x*, *y* di *X*, terdapat tepat satu *g* di *G* sedemikian sehingga $g.x = y$.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan utama studi literatur untuk kajian teoritis. Studi literatur dilakukan dengan menelaah berbagai referensi berupa buku teks dan artikel ilmiah yang membahas teori grup, homomorfisma grup dan morfisma.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan definisi pada bagian pendahuluan di atas, mudah dipahami bahwa setiap grup action bebas pada himpunan yang tidak kosong adalah grup action setia. Sebuah grup *G* bertindak pada *X* secara setia jika dan hanya jika homomorfisme $G \rightarrow \text{Sym}(X)$ memiliki

kernel trivial, yaitu untuk grup action setia, G isomorfik dengan grup permutasi di X , khususnya G isomorfik dengan petanya di $Sym(X)$ (Lang Serge, 2002).

Jika G adalah grup, maka persamaan $ax = b$ memiliki satu solusi untuk x (Adkins, and Weintraub, 1992). Dari 4). pada Definisi 2. dan sifat singular dari solusi $ax = b$, dapat diketahui bahwa grup action dari G pada G dengan perkalian kiri adalah grup action reguler, sehingga setia, sehingga setiap grup dapat dimasukkan ke dalam grup simetri pada elemen-elemennya, yaitu $Sym(G)$, sifat ini dikenal sebagai Teorema Cayley (Lang Serge, 2002).

Dari 3). pada Definisi 2. dan sifat tunggal hasil operasi dalam grup G , dapat diketahui bahwa grup action dari G pada $G \times X$ untuk himpunan X dengan perkalian kiri pada koordinat pertama adalah grup action bebas.

Dari 1). pada Definisi 2. dan sifat perkalian dari himpunan koset $aH = (ab^{-1})bH$, dapat diketahui bahwa grup action dari G pada himpunan koset relatif terhadap subgrup H adalah grup action transitif.

Kembali ke kondisi umum dan misalkan grup G bertindak pada himpunan X . Misalkan x berada di X . Himpunan elemen g di G sedemikian rupa sehingga $gx = x$ merupakan subgrup dari G dan disebut subgrup isotrofi x di G , dilambangkan dengan G_x . Jika G bertindak pada dirinya sendiri melalui konjugasi, maka subgrup isotrofi elemen tersebut tidak lain adalah normalizer elemen g . Demikian juga jika G bertindak pada himpunan subgrup melalui konjugasi, maka subgrup isotrofi dari subgrup G adalah normalisatornya (Lang Serge, 2002).

Misalkan G bertindak pada himpunan X dan misalkan x, x' berada di X dan g berada di G sedemikian hingga $gx = x'$, maka $G_{x'} = gG_xg^{-1}$. Memang, terlihat bahwa gG_xg^{-1} meninggalkan x' tetap. Sebaliknya, jika $g'x' = x'$, maka $g'hx = hx$ sehingga $h^{-1}g'h$ berada di G_x dan g' berada di hG_xh^{-1} , sehingga kelompok isotropi G_x dan $G_{x'}$ konjugat.

Definisi 3:

Morfisma dari G -set X ke G -set Y didefinisikan sebagai pemetaan $f: X \rightarrow Y$ yang memenuhi $f(g.x) = gf(x)$ untuk setiap g di dalam G dan setiap x di dalam X .

Morfisme G -sets juga disebut G -Maps. Jika morfisma f bijektif, maka inversnya juga merupakan morfisma G -sets, sehingga f disebut isomorfisma G -sets dan G -sets pada X isomorfis dengan G -sets pada Y . Berikut ini akan dibuktikan tiga G -sets yang isomorfis.

Sifat 1 :

Setiap grup action reguler isomorfik dengan grup action G yang bertindak pada G dengan perkalian kiri.

Sifat 2 :

Setiap grup action bebas isomorfis dengan grup action G yang bertindak pada $G \times X$ dengan perkalian kiri pada koordinat pertama.

Sifat 3 :

Setiap grup action transitif isomorfis dengan grup action G yang bertindak pada himpunan koset-koset relatif terhadap subgrup isotrofi H dari grup G .

Bukti 1:

Dibuat pemetaan $f: G \rightarrow X$ dengan G -set dari grup action G pada G dengan perkalian kiri dan G -set dari grup action reguler dengan sifat $f(g) = g.x$ sedemikian hingga $f(gg) = gg.x$ dan $g.f(g) = g.(g.x)$, sehingga $f(gg) = g.f(g)$. Jadi pemetaan f adalah morfisma G -set. Jika y berada di X , karena X adalah G -set dari grup action reguler, maka terdapat elemen

tunggal g di G sedemikian sehingga $y = g.x$. Pemetaan $f^{-1} : X \rightarrow G$ didefinisikan oleh $f^{-1}(g.x) = g$, sehingga $f^{-1}(h.g.x) = f^{-1}(hg.x) = hg = h.f^{-1}(g.x)$.
Jadi setiap grup action reguler isomorfis dengan grup action G pada G dengan perkalian kiri.

Bukti 2:

Dibuat pemetaan $f: G \times X \rightarrow X$ dengan G -set dari grup action G pada $G \times X$ untuk himpunan X dengan perkalian kiri pada koordinat pertama dan X adalah G -set dari grup action bebas yang ditentukan oleh $f(g,x) = g.x$ sehingga $f(hg,x) = hg.x$ dan $h.f(g,x) = h.(g.x) = hg.x$, sehingga $f(hg,x) = h.f(g,x)$. Oleh karena itu, pemetaan f adalah morfisma G -set. Karena G -set grup action G pada X adalah grup action bebas, sehingga jika $g.x = h.x$ berakibat $g = h$ untuk setiap x in X . Pemetaan $f^{-1} : X \rightarrow G$ yang ditentukan oleh $f^{-1}(g.x) = (g,x)$ di dalam $G \times X$, karena grup action bebas maka $f^{-1}(h.g.x) = f^{-1}(hg.x) = (hg,x)$ dan $h.f^{-1}(g.x) = h.(g,x) = (hg,x)$.

Jadi setiap grup action bebas isomorfis dengan G -sets dari grup action G bertindak pada $G \times X$ untuk setiap himpunan X dengan perkalian kiri pada koordinat pertama.

Bukti 3:

Misalkan himpunan $G_x = \{g \in G / g.x = x, x \in X\}$ maka G_x adalah subgrup di dalam G dan dinamakan subgrup isotropy. Misalkan x dan x' di dalam X dan g di dalam G sedemikian hingga $gx = x'$, maka $G_{x'} = gG_x g^{-1}$ (Lang Serge, 2002).

Didefinisikan pemetaan $f: G/H \rightarrow X$, dengan G -sets adalah G bertindak pada himpunan koset coset-coset relatif terhadap subgrup H , dan G grup action transitif pada X sehingga terdapat g di G sedemikian sehingga $g.x = y$ untuk setiap x,y di X , maka $x = g^{-1}y$, dan pemetaan f oleh $f(gH) = gx$ sedemikian sehingga $f(h.gH) = f(hgH) = hg.x = hy$ and $h.f(gH) = h.(g.x) = hg.x$, sehingga $f(h.gH) = h.f(gH)$. Jadi pemetaan f adalah morfisme G -set morphisma. Jika H adalah subgrup isotrofi, maka $H = g^{-1}G_y g = G_x$. Misalkan pemetaan $f^{-1} : X \rightarrow G/H$ didefinisikan oleh $f^{-1}(x) = gH$ sehingga $f^{-1}(h.(g.x)) = f^{-1}(hg.x) = f^{-1}(hg g^{-1}y) = f^{-1}(hy) = h^{-1}H = H$ dan $h.f^{-1}(g.x) = h.f^{-1}(y) = H$.

Jadi terbukti bahwa setiap grup action transitif isomorfik dengan grup action G pada himpunan koset relatif terhadap subgrup isotropy.

SIMPULAN

Setiap grup action regular isomorfis dengan grup action G yang bertindak pada G dengan perkalian kiri, setiap grup action bebas yang isomorfis dengan grup action G bertindak pada $G \times X$ untuk himpunan X dengan perkalian kiri pada koordinat pertama, dan setiap grup action transitif isomorfis dengan grup action G bertindak pada himpunan coset-coset relatif terhadap subgrup isotropy.

DAFTAR PUSTAKA

- Adkins, William A., Weintraub Steven H., 1992, *Algebra, An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag Inc. New York.
- Armstrong M. A., 1988, *Groups and Symmetry* Springer-Verlag Inc. New York.
- Lang Serge, 2002, *Algebra*, Revised Third edition, Springer-verlag Publishing Company, Inc., New York.
- Rakhsh Khorshid, N. and Ostadhadi-Dehkordi, S. (2018), *Relations Between G-Sets And Their Assosiate of G-Sets*. Journal of Algebra and Related Topics Vol. 8, No 2, (2020), pp 75-92