



Analisis *Error Correcting Code* Berbasis Matriks *Adjacency* dari Graf Kipas

Ayu Dewi Gayatri*

Universitas Sebelas Maret, *Penulis Korespondensi: ayudewi1801@student.uns.ac.id

Putranto Hadi Utomo

Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK

Perkembangan pesat teknologi digital memerlukan proses transmisi dan penyimpanan data yang efisien untuk menunjang berbagai aktivitas digital. Penelitian ini bertujuan untuk membentuk dan menganalisis *error correcting code* berbasis matriks *adjacency* dari graf kipas F_n dengan $n > 2$ serta mengkaji parameter kode yang dihasilkan berdasarkan struktur graf tersebut. Kajian ini termasuk dalam bidang teori kode yang memanfaatkan struktur graf untuk menghasilkan kode linear biner dengan *minimum distance* tertentu untuk menganalisis kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan. Metode yang digunakan adalah studi pustaka berupa buku, jurnal, atau publikasi dalam situs web terkait *error correcting code* berbasis matriks *adjacency* suatu graf. Tahapan penelitian meliputi pembentukan struktur graf kipas, penyusunan matriks *adjacency*, penghapusan baris identik matriks *adjacency*, pembentukan matriks generator $G = [I_k | A]$ melalui penggabungan matriks identitas dan matriks *adjacency* hasil penyederhanaan, dan perhitungan parameter kode $[n, k, d]$ serta nilai *rate* $R = \frac{k}{n}$ untuk menganalisis efisiensi pengkodean. Analisis dilakukan dengan mengkaji pengaruh jumlah *vertex* graf kipas serta pengaruhnya terhadap nilai *minimum distance* dan *rate* kode. Hasil penelitian menunjukkan bahwa matriks *adjacency* graf kipas F_3 , F_4 , dan F_5 menghasilkan kode dengan kemampuan koreksi satu bit kesalahan, dengan nilai *minimum distance* masing-masing 4 dan 3 serta nilai *rate* 0.4285 dan 0.5. Hasil ini menunjukkan bahwa struktur graf kipas memiliki potensi sebagai dasar pembentukan *error correcting code* yang sederhana dan efisien serta berpotensi untuk dikembangkan lebih lanjut pada sistem komunikasi digital dengan kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan yang lebih optimal.

Kata kunci: *Error correcting code*, Graf Kipas, Kode Linear Biner, *Matriks Adjacency*, *Matriks Generator*, Teori Kode

PENDAHULUAN

Seiring dengan kemajuan teknologi digital, kegiatan transmisi dan penyimpanan data menjadi aspek penting dalam mendukung berbagai aktivitas digital. Namun, data yang dikirimkan sering mengalami gangguan, seperti perubahan bit yang menyebabkan kesalahan pada data yang diterima. Kondisi ini dapat mengakibatkan berkurangnya keandalan informasi, bahkan hilangnya sebagian pesan yang dikirimkan. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode yang mampu menjaga keutuhan data meskipun terjadi gangguan selama proses transmisi maupun penyimpanan.

Teori kode merupakan kajian yang membahas sifat-sifat kode dan kesesuaiannya untuk berbagai aplikasi, seperti kompresi data, kriptografi, deteksi dan koreksi kesalahan, transmisi data serta penyimpanan data. Bidang teori kode lahir dari karya Shannon pada tahun 1948 yang berjudul "*A Mathematical Theory of Communication*" sebagai respons terhadap permasalahan praktis dalam menjaga keandalan komunikasi informasi yang mengandung gangguan (Pless, 1998). Salah satu konsep utama dalam teori kode adalah *error correcting codes*, yaitu metode yang menambahkan redundansi pada data asli untuk memungkinkan deteksi dan koreksi kesalahan yang terjadi selama transmisi atau penyimpanan (Ravagnani, 2025). Kesalahan ini disebut bit *error*, misalnya 0 menjadi 1 atau sebaliknya, yang dapat menyebabkan hilangnya sebagian pesan. Secara umum, proses *error correcting code* memiliki dua tahap utama yaitu encoding dan decoding (Agustin dan

Utomo, 2024). Efektivitas suatu kode dalam mendeteksi dan mengoreksi kesalahan diukur melalui beberapa parameter penting yaitu panjang kode (n), dimensi kode (k), dan *minimum distance* (d). Sejak kode Hamming diperkenalkan oleh Hamming pada tahun 1950, berbagai metode pembentukan *error correcting code* seperti kode siklik, kode BCH, dan kode Reed-Solomon terus dikembangkan dan digunakan secara luas dalam sistem komunikasi digital dan penyimpanan data. Perkembangan berikutnya memperlihatkan munculnya berbagai jenis kode yang semakin memperkuat penerapan teori kode dalam komunikasi digital serta penyimpanan data.

Pembentukan *error correcting code* semakin berkembang melalui konsep dan aplikasi kode linear biner. Kode linear biner didefinisikan subruang dari ruang vektor biner $\mathbb{F}_2^n$, yaitu himpunan semua n -tuple dari 0 dan 1, dengan operasi penjumlahan vektor setiap komponen mod 2 dan hasil penjumlahan (XOR) setiap dua (atau lebih) vektor juga termasuk dalam kode tersebut (Pless, 1998). Suatu kode linear biner $[n, k]$ merupakan subruang berdimensi k yang dibentuk oleh kombinasi linear dari k vektor basis yang dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks untuk mempermudah pembentukan kode. Matriks yang baris-barisnya merupakan vektor-vektor basis disebut sebagai matriks generator (Hidayat *et al.*, 2024). Melalui matriks generator, seluruh *codeword* dari suatu kode linear dapat dihasilkan dengan melakukan kombinasi linear terhadap baris-barisnya. Salah satu pendekatan yang sederhana dan mudah diaplikasikan sebagai dasar pembentukan matriks generator adalah melalui teori graf, khususnya dengan menggunakan matriks *adjacency* dari suatu graf sederhana yang dilambangkan dengan angka 0 dan 1 (Zaky dkk., 2025). Seiring dengan hal tersebut, perkembangan penelitian, konsep *error correcting code* mulai dikaitkan dengan teori graf sebagai upaya memperluas pendekatan dalam pembentukan kode.

Pemanfaatan struktur graf dalam konstruksi *error correcting code* telah dikaji dalam berbagai penelitian sebelumnya. Kopparty *et al.* (2024) membahas teori dan konstruksi *error-correcting graph codes* berbasis matriks *adjacency*. Adapun Ganagi dan Ramane (2016) mengkaji jarak Hamming antara string yang dihasilkan oleh matriks *adjacency* beberapa graf tertentu. Penelitian oleh Kurz (2022) membahas jumlah *minimal codewords* pada kode linear biner yang dibangkitkan dari matriks *adjacency* graf serta hubungannya dengan struktur graf lengkap, bipartit, lintasan, dan siklus. Namun demikian, kajian-kajian terdahulu tersebut belum secara spesifik membahas pemanfaatan graf kipas dalam pembentukan kode linear biner. Salah satu kelas graf yang potensial untuk dikaji dalam konteks ini adalah graf kipas F_n dengan $n > 2$, yang memiliki struktur khas berupa satu *vertex* pusat yang terhubung ke seluruh *vertex* pada graf lintasan sehingga menghasilkan pola keterhubungan yang asimetris namun teratur pada matriks *adjacency*-nya. Namun demikian, matriks *adjacency* graf kipas dalam bentuk awalnya belum tentu memenuhi syarat *minimum distance* yang memadai dan efisien, sehingga diperlukan modifikasi matriks *adjacency* sebelum digunakan dalam pembentukan kode. Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini bertujuan untuk membentuk kode linear biner berbasis matriks *adjacency* graf kipas serta menganalisis parameter kodenya, meliputi panjang kode (n), dimensi (k), *minimum distance* (d), dan nilai *rate* kode, guna mengevaluasi kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan secara sistematis dan efisien.

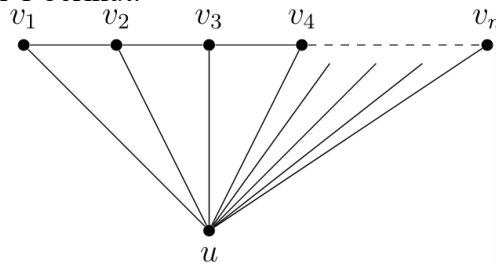
METODE (times new roman, 12pt)

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur yang dilakukan yaitu dengan mempelajari serta memahami konsep juga teori merujuk pada sumber berupa buku, jurnal, tesis maupun publikasi yang dimuat dalam situs web terkait *error correcting code* dan kode linear biner berbasis matriks *adjacency* graf kipas

F_n dengan $n > 2$. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Membentuk struktur graf kipas F_n

Pada tahap awal, dibangun struktur graf kipas F_n secara visual yang terdiri atas satu *vertex* pusat dan n *vertex* pada *path*. Graf ini merepresentasikan hubungan antar*vertex* melalui himpunan *vertex* dan *edge* sesuai dengan karakteristik graf kipas sebagai dasar dalam pembentukan matriks *adjacency*. Struktur graf kipas F_n ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Struktur umum graf kipas F_n

2. Menyusun matriks *adjacency* A dari graf kipas

Matriks *adjacency* yaitu matriks biner persegi A berukuran $n \times n$, dengan n menunjukkan jumlah *vertex*. Dari struktur graf kipas yang telah terbentuk, disusun matriks *adjacency* $A = [a_{ij}]$ sebagai representasi matematis dari struktur *adjacency* graf, di mana setiap elemen a_{ij} menunjukkan hubungan antara *vertex* i dan *vertex* j .

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{jika } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

3. Menyederhanakan matriks *adjacency* A

Dilakukan pemeriksaan terhadap setiap baris matriks *adjacency* untuk mengidentifikasi baris-baris yang identik, yaitu baris t_i dan t_j yang memenuhi $t_i = t_j$ untuk $i \neq j$. Dari setiap kelompok baris yang identik, hanya satu baris yang dipertahankan, sedangkan baris lainnya dihapus. Proses ini bertujuan agar struktur matriks hanya merepresentasikan informasi yang tunggal dan relevan terhadap pembentukan struktur kode serta mengurangi redundansi yang dapat memengaruhi *minimum distance* kode.

4. Membentuk matriks generator G

Setelah proses penyederhanaan, dibentuk matriks generator G dengan menggabungkan matriks identitas I_k berukuran $k \times k$ dan matriks *adjacency* A hasil penyederhanaan, di mana k menyatakan jumlah baris matriks *adjacency* setelah proses eliminasi. Matriks generator ini berukuran $k \times n$ dan baris-barisnya membentuk basis dari kode linear biner yang dihasilkan. Struktur umum matriks generator G dinyatakan sebagai berikut.

$$G = [I_k \mid A]$$

5. Menghitung nilai parameter kode $[n, k, d]$

Berdasarkan matriks generator G , ditentukan tiga parameter utama kode, yaitu panjang kode (n), dimensi kode (k), dan *minimum distance* (d). Panjang kode n ditentukan oleh jumlah kolom pada matriks generator, sedangkan dimensi kode k ditentukan oleh jumlah baris matriks generator. Nilai *minimum distance* d ditentukan

sebagai jarak Hamming terkecil antar *codeword* yang berbeda. Jarak Hamming antara dua vektor biner x dan y dengan panjang yang sama didefinisikan sebagai

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i \oplus y_i)$$

dengan

$$x_i \oplus y_i = \begin{cases} 1, & \text{jika } x_i \neq y_i \\ 0, & \text{jika } x_i = y_i. \end{cases}$$

6. Menghitung nilai *rate* kode

Setelah parameter $[n, k, d]$ diperoleh dari matriks generator G , dilakukan perhitungan nilai *rate* kode yang menunjukkan efisiensi kode dalam merepresentasikan informasi, Nilai *rate* didefinisikan sebagai perbandingan antara jumlah bit informasi (k) dan jumlah bit total dalam setiap *codeword* n (Alizadeh *et al.*, 2023), yang dinyatakan sebagai

$$Rate = R = \frac{k}{n}, \quad 0 < R \leq 1.$$

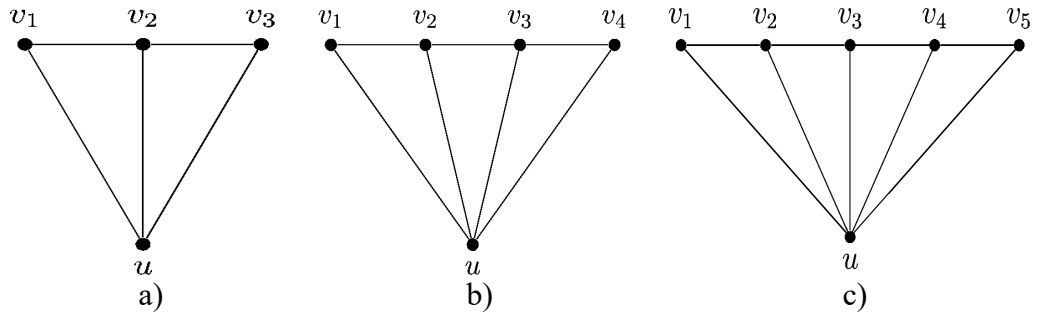
7. Analisis Hasil dan Evaluasi Kemampuan Deteksi dan Koreksi Kode

Tahap akhir penelitian berupa analisis hasil perhitungan parameter kode untuk mengevaluasi kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan dari kode yang dihasilkan. Analisis dilakukan dengan mengamati hubungan antara jumlah *vertex*, nilai *minimum distance* (d), dan nilai *rate* kode. Kemampuan deteksi kesalahan ditentukan oleh nilai $d - 1$, sedangkan kemampuan koreksi kesalahan ditentukan oleh $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ (Aydin, 2007).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dan pembahasan pembentukan *error correcting code* berbasis matriks *adjacency* dari graf kipas F_n dengan $n > 2$ dan analisis parameter kode $[n, k, d]$ serta nilai *rate* R diuraikan sebagai berikut.

Teori graf merupakan cabang dari matematika diskrit yang mempelajari struktur dan hubungan antara objek-objek yang direpresentasikan sebagai *vertex* serta hubungan antara *vertex-vertex* yang direpresentasikan melalui *edge*. Graf kipas F_n adalah gabungan dari graf *complete* K_1 dan graf *path* P_n , yaitu $F_n = K_1 + P_n$, diperoleh dengan menghubungkan semua *vertex* dari P_n ke *vertex* K_1 dengan $n > 2$, di mana setiap *vertex* dihubungkan oleh sebuah *edge*. Graf kipas memiliki $n + 1$ *vertex* dan $2n - 1$ *edge* (Santiago, 2017). Graf kipas F_n memiliki dua *vertex* berderajat 2 dan $n - 2$ *vertex* berderajat 3 (Tanna *et al.*, 2017). Dengan demikian, graf kipas didefinisikan untuk $n > 2$. Struktur graf kipas ini kemudian direpresentasikan ke dalam matriks *adjacency* yang selanjutnya digunakan sebagai dasar pembentukan matriks generator dan penentuan parameter kode. Diberikan struktur graf kipas F_3 , F_4 , dan F_5 yang ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. a) Graf Kipas F_3 b) Graf Kipas F_4 c) Graf Kipas F_5

Dalam teori graf, hubungan antarvertex memiliki peran penting dalam menggambarkan struktur dan sifat graf secara keseluruhan. Struktur dan keterhubungan graf kipas pada Gambar 2 dapat direpresentasikan dalam bentuk aljabar, salah satunya melalui konsep matriks *adjacency*. Matriks *adjacency* menggambarkan hubungan antarvertex pada graf kipas digunakan sebagai dasar pembentukan matriks generator untuk *error correcting code*. Dua vertex dikatakan *adjacent* apabila diantara keduanya terdapat *edge* yang menghubungkan (Paramadevan & Sotheeswaran, 2021). Berdasarkan struktur graf kipas yang ditunjukkan pada Gambar 2, diperoleh matriks *adjacency* dari graf kipas F_3 , F_4 , dan F_5 yang digunakan sebagai dasar pembentukan matriks generator dalam konstruksi *error correcting code*.

1. Matriks *adjacency* graf kipas F_3

$$A(F_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks *adjacency* graf kipas F_4

$$A(F_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matriks *adjacency* graf kipas F_5

$$A(F_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *adjacency* dari graf kipas yang telah diperoleh, dapat diamati pola hubungan antarvertex yang menrepresentasikan struktur graf tersebut. Graf kipas F_n dibentuk dari graf lintasan P_n yang dihubungkan dengan satu vertex pusat u , sehingga pola keterhubungan antarvertex pada graf kipas membentuk struktur yang teratur dan sistematis pada matriks *adjacency*-nya. Pola matriks *adjacency* graf kipas dapat ditentukan secara sistematis tanpa harus merepresentasikan graf secara visual sehingga memungkinkan pembentukan matriks *adjacency* untuk graf kipas dengan jumlah vertex yang lebih besar.

Secara umum, matriks *adjacency* graf kipas F_n dapat dinyatakan sebagai $A(F_n) = [a_{ij}]$, dengan pola entri matriks ditentukan sebagai berikut.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i, j = 1 \text{ dan } 2 \leq i, j \leq n + 1, \\ 1, & \text{jika } 2 \leq i, j \leq n + 1 \text{ dan } |(i - 1) - (j - 1)| = 1, \text{ dan} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Setelah matriks *adjacency* graf kipas dibentuk, dilakukan tahap pengecekan dan penyederhanaan dengan cara mengeliminasi baris-baris yang identik. Baris-baris yang identik pada matriks *adjacency* merepresentasikan vektor baris yang sama atau pesan yang identik dalam ruang vektor biner, sehingga bersifat bergantung linier dan tidak menambah informasi baru dalam pembentukan kode. Oleh karena itu, baris-baris tersebut dihapus agar matriks generator yang dibentuk hanya terdiri atas vektor-vektor basis yang saling bebas linier (Cascudo *et al.*, 2019). Proses ini bertujuan untuk meningkatkan efisiensi kode serta menghasilkan nilai *minimum distance* yang lebih besar, sehingga kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan menjadi lebih optimal. Proses penyederhanaan matriks *adjacency* ditunjukkan pada matriks *adjacency* graf kipas F_3 sebagaimana disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Eliminasi Baris Matriks *Adjacency* Graf Kipas F_3

Sebelum Eliminasi	Sesudah Eliminasi
Baris 1: 0 1 1 1	Baris 1: 0 1 1 1
Baris 2: 1 0 1 0	Baris 2: 1 0 1 0
Baris 3: 1 1 0 1	Baris 3: 1 1 0 1
Baris 4: 1 0 1 0	— (dihapus karena identik dengan Baris 2)

Berdasarkan Tabel 1, diperoleh matriks *adjacency* graf kipas F_3 hasil eliminasi baris identik sebagai berikut.

$$A(F_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks *adjacency* graf kipas yang telah disederhanakan digunakan sebagai dasar pembentukan matriks generator dalam membangun suatu kode linier biner untuk *error correction code*. Matriks generator G berfungsi untuk menghasilkan kode dengan penambahan bit redundansi yang memungkinkan proses deteksi dan koreksi kesalahan. Matriks generator merupakan matriks berukuran $k \times n$ yang baris-barisnya membentuk vektor basis dari kode linear. Secara umum, matriks *adjacency* graf kipas tidak digunakan langsung sebagai matriks generator karena strukturnya berpotensi menghasilkan *minimum distance* yang kurang optimal dalam proses deteksi dan koreksi kesalahan. Oleh karena itu, dilakukan modifikasi dengan menggabungkan matriks *adjacency* hasil penyederhanaan dengan matriks identitas guna membentuk struktur kode yang lebih efektif dan kesalahan kode dapat dideteksi dan dikoreksi dengan optimal. Setelah proses penyederhanaan matriks *adjacency*, matriks generator G dibentuk dengan menggabungkan matriks identitas I_k berukuran $k \times k$ dengan k dimensi kode dan matriks *adjacency* A yang telah disederhanakan (Mallik & Yildiz, 2021). Struktur umum dari matriks generator G dinyatakan sebagai berikut.

$$G = [I_k | A]$$

Berdasarkan struktur umum matriks generator G tersebut, diperoleh matriks generator dari graf kipas F_3 , F_4 , dan F_5 sebagai berikut.

1. Matriks generator graf kipas F_3

$$[I_3 | A(F_3)] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2. Matriks generator graf kipas F_4

$$[I_5 | A(F_4)] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

3. Matriks generator graf kipas F_5

$$[I_6 | A(F_5)] = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Berdasarkan matriks generator yang diperoleh, ditentukan parameter kode $[n, k, d]$ dan nilai *rate* untuk mengevaluasi performa kode serta menganalisis pengaruh pertambahan jumlah *vertex* pada graf kipas terhadap performa tersebut. Dalam konteks *error correcting code*, panjang kode (n) menyatakan jumlah total bit dalam setiap *codeword*, yang terdiri atas bit informasi dan bit redundansi, sedangkan dimensi kode (k) menyatakan jumlah bit informasi atau banyaknya vektor basis bebas linier dalam matriks generator (Kurz, 2024). Selisih keduanya, yaitu $r = n - k$, menunjukkan jumlah bit redundansi yang berperan dalam kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan. Bobot suatu *codeword* $wt(x)$ menyatakan jumlah bit bernilai 1 dalam vektor tersebut dan berkaitan erat dengan jarak Hamming, yaitu banyaknya posisi bit yang berbeda antara dua *codeword* dengan panjang yang sama. Pada kode linear biner, nilai *minimum distance* d sama dengan bobot Hamming minimum dari seluruh *codeword* non-nol yang dihasilkan oleh kombinasi linear baris-baris matriks generator (Zhang et al., 2024). Secara umum, *minimum distance* (d) didefinisikan sebagai jarak Hamming terkecil antara dua *codeword* yang berbeda (Ozkan, 2024). Parameter ini menjadi indikator utama yang menentukan performa kode, karena nilai d menentukan kemampuan deteksi hingga $d - 1$ kesalahan dan kemampuan koreksi hingga $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ kesalahan.

Selanjutnya, *rate* juga disebut sebagai laju kode didefinisikan sebagai rasio antara panjang pesan k dengan panjang kode n (Pless, 1998). Nilai *rate* dapat dihitung menggunakan persamaan berikut.

$$R = \frac{k}{n}, \quad 0 < R \leq 1.$$

Berdasarkan matriks generator G yang diperoleh, ditentukan nilai parameter kode $[n, k, d]$ dan nilai *rate* kode menggunakan rumus yang telah ditetapkan, sebagaimana disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Parameter $[n, k, d]$ dan *rate* kode dari graf kipas F_3, F_4 , dan F_5

F_n	n	k	d	$d - 1$	$\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$	R
F_3	7	3	4	3	1	0.4285
F_4	10	5	3	2	1	0.5
F_5	12	6	3	2	1	0.5

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 2, diperoleh bahwa setiap graf kipas F_3, F_4 , dan F_5 menghasilkan parameter kode $[n, k, d]$ yang berbeda. Kode yang dibentuk dari graf kipas F_3 memiliki nilai *minimum distance* $d = 4$, yang menunjukkan kemampuan mendeteksi hingga tiga kesalahan dan mengoreksi satu bit kesalahan dengan nilai *rate* 0.4285. Nilai *rate* yang lebih rendah ini disebabkan oleh adanya proses eliminasi baris pada matriks *adjacency*, yang mengurangi dimensi kode k relatif terhadap panjang kode n . Berbeda dengan F_3 , graf F_4 dan F_5 menghasilkan kode dengan *minimum distance* $d = 3$, yang menunjukkan kemampuan mendeteksi hingga dua kesalahan dan mengoreksi satu bit kesalahan serta nilai *rate* 0.5. Kondisi tersebut terjadi karena tidak dilakukan proses eliminasi baris pada matriks *adjacency*, yang mengakibatkan panjang kode n bernilai dua kali dimensi kode k . Hal ini menunjukkan bahwa struktur matriks *adjacency* berpengaruh langsung terhadap dimensi kode dan nilai *rate* yang dihasilkan.

Secara matematis, eliminasi baris-baris identik pada matriks *adjacency* pada matriks *adjacency* mengurangi kemungkinan terbentuknya *codeword* dengan bobot Hamming rendah. Baris identik merepresentasikan vektor yang sama dalam ruang vektor biner sehingga kombinasi linear tertentu dapat menghasilkan *codeword* dengan jumlah bit bernilai satu yang relatif kecil. Dengan tersusunnya matriks generator dari vektor-vektor basis yang bebas linier, setiap kombinasi linear non-nol cenderung menghasilkan *codeword* dengan bobot Hamming yang lebih besar. Akibatnya, jarak Hamming minimum antar*codeword* meningkat, sehingga graf kipas yang mengalami eliminasi baris, seperti graf kipas F_3 , memiliki nilai *minimum distance* lebih besar dibandingkan graf kipas tanpa eliminasi baris.

Secara umum, nilai *rate* mencerminkan tingkat efisiensi suatu kode. Jika nilai *rate* mendekati 1, maka kode tersebut bersifat lebih efisien karena sebagian besar terdiri atas bit informasi, namun kemampuan deteksi dan koreksi cenderung rendah. Sebaliknya, jika *rate* mendekati 0, maka kode memiliki redundansi yang tinggi sehingga kemampuan deteksi dan koreksi meningkat, meskipun efisiensi menurun karena diperlukan lebih banyak bit untuk merepresentasikan pesan yang sama. Peningkatan jumlah bit redundansi r umumnya memungkinkan peningkatan nilai *minimum distance* d , sehingga kemampuan deteksi dan koreksi kesalahan menjadi lebih baik, meskipun berdampak pada penurunan efisiensi pengkodean karena nilai *rate* menjadi lebih kecil. Di sisi lain, peningkatan dimensi kode k tanpa penambahan redundansi yang memadai cenderung menurunkan nilai d sehingga kemampuan koreksi kesalahan menjadi terbatas. Dengan demikian, parameter $n, k, r, wt(x)$, dan d saling berkaitan erat dalam pembentukan *error correcting code* yang efektif dan efisien.

SIMPULAN

Penelitian ini membahas pembentukan *error correcting code* berbasis matriks *adjacency* dari graf kipas F_n dengan tujuan mengidentifikasi pola pembentukan kode linear biner serta menganalisis parameter $[n, k, d]$ dan nilai *rate* yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan peningkatan jumlah *vertex* pada graf kipas berpengaruh terhadap bertambahnya dimensi kode (k) dan peningkatan nilai *rate*, yang menunjukkan peningkatan efisiensi pengkodean graf kipas yang dikaji. Meskipun nilai *minimum distance* (d) mengalami penurunan dari 4 menjadi 3 seiring bertambahnya jumlah *vertex*, kode yang dihasilkan tetap memiliki kemampuan mendeteksi dan mengoreksi kesalahan, dengan kemampuan mendeteksi dua hingga tiga kesalahan dan mengoreksi satu kesalahan bit. Nilai *rate* kode meningkat dan stabil seiring bertambahnya jumlah *vertex*, yaitu dari 0.4285 pada graf kipas F_3 menjadi 0.5 pada graf kipas F_4 dan F_5 , yang menunjukkan keseimbangan antara efisiensi pengkodean dan kemampuan koreksi kesalahan. Dengan demikian, pembentukan kode linear biner berbasis matriks *adjacency* graf kipas dapat dijadikan sebagai pendekatan konstruktif dalam perancangan *error correcting code* yang memiliki efisiensi pengkodean yang cukup efisien serta berpotensi untuk dikembangkan lebih lanjut pada sistem komunikasi digital yang memerlukan mekanisme deteksi dan koreksi kesalahan yang lebih optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, P. A. N., & Utomo, P. H. (2024). Implementasi proses encoding dan decoding kode Reed–Muller menggunakan Python. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi Seri 02*, 1(2), 301–309.
- Alizadeh, F., Glasby, S. P., & Praeger, C. E. (2023). Sequences of linear codes where the rate times distance grows rapidly. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, 10(2), 105–113.
- Aydin, N. (2007). An Introduction to Coding Theory via Hamming Codes: A Computational Science Model. *Faculty Publications*, Paper 4.
- Cascudo, I., Gundersen, J. S., & Ruano, D. (2019). Squares of matrix-product codes. *Finite Fields and Their Applications*, 62, 101606.
- Ganagi, A. B. and H. S. Ramane. (2016). Hamming Distance between the Strings Generated by the Adjacency Matrix of a Graph and their Sum. *Algebra and Discrete Mathematics*, 22(1).
- Hamming, R. W. (1950). Error Detecting and *Error correcting codes*. *Bell System Technical Journal*, 29(2), 147–160.
- Hidayat, A. N., Krisnawati, V. H., & Alghofari, A. R. (2024). Reversible Self-Dual Codes over Finite Field. *Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 9(2), 287–296.
- Kopparty, S., Potukuchi, A., & Sha, H. (2024). Error-Correcting Graph Codes. *Preprint*, University of Toronto and York University.
- Kurz, S. (2022). On the number of minimal codewords in codes generated by the adjacency matrix of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 309, 221–228.
- Kurz, S. (2024). Non-projective two-weight codes. *Entropy*, 26(4), 289.
- Mallik, S., & Yildiz, B. (2021). Graph theoretic aspects of minimum distance and equivalence of binary linear codes. *Australasian Journal of Combinatorics*, 79(3), 515–526.
- Özkan, M. (2024). Applications of fixed minimum distance codes with generators in standard form. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 8(11), 708–715.
- Paramadevan, P., & Sotheeswaran, S. (2021). Properties of adjacency matrix of a graph and its construction. *Journal of Science*, 12(1), 13–21.

- Pless, V. (1998). *Introduction to The Theory of Error-Correcting Codes (3rd ed.)*. John Wiley & Sons.
- Ravagnani, A. (2025). Small-weight codewords of algebraic geometry codes. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 18, 779–795.
- Santiago, R. (2017). Packing Chromatic Number of Certain Fan and Wheel Related Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 14(1), 63–69.
- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3), 379–423.
- Tanna, D., Ryan, J., & Senaničová-Feňovíková, A. (2017). Edge Irregular Reflexive Labeling of Prisms and Wheels. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 69(3), 394–401.
- Zaky, R. N., Triyani, & Nurshiami, S. R. (2025). Energi Ketetanggaan pada Graf Benteng. *Prosiding Diskusi Panel Nasional Pendidikan Matematika*, 93–102.
- Zhang, G., Lin, L., Qin, C., & Li, R. (2024). Hermitian self-dual 2-quasi-abelian codes. *Finite Fields and Their Applications*, 94, 102357.